Γραμμική Άλγεβρα Ι
ΤΜΗΜΑ Α
#1 ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1) Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$ Να υπολογίσετε όπου γίνονται τα γινόμενα ΑΒ, ΒΑ, ΒΓ, ΓΒ, ΑΒΓ.

2) Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ να δείξετε ότι $A^2 = A$.

3) Αν $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ να δείξετε ότι $B^3 = 0$.

4) Αν $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ να βρείτε Δ με $\Delta\Gamma = I_{3\times3}$.

5) Να υπολογίσετε όλους τους πίνακες 2×2 οι οποίοι αντιμετατίθενται με τον $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Να βρείτε τον αντίστροφο του $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ και τον πίνακα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ώστε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7) Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $A^4 = I_{3\times3}$ και να βρείτε τον αντίστροφο του A. Βρείτε τον πίνακα A^{2013}.

8) Να δείξετε ότι $(AB)^t = B^tA^t$. Δείξτε επίσης ότι ο ανάστροφος του αντιστρόφου ενός πίνακα ισούται με τον αντίστροφο του αναστρόφου.

9) Έστω Α ένας *ν×ν* πίνακας ώστε $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_\nu = O_{\nu\times\nu}$, τότε $A^{-1} = -A^4$.

10) Έστω Α, *Β* και Α + Β αντιστρέψιμοι *ν×ν* πίνακες. Δείξτε ότι και ο $A^{-1} + B^{-1}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος. $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.